Задача 73:

Задача 14. Определить парамагнитную восприимчивость газа свободных электронов, связанную с наличием у них собственных магнитных моментов (спиновый парамагнетизм Паули, W. Pauli, 1927). Рассмотреть случаи вырожденного и невырожденного газов.

Поясним, что происходит. У нас есть N электронов. Мы включили внешнее поле H.

Нас спрашивают, какой отклик M дадут электроны.

Давайте рассуждать.

С появлением магнитного поля у каждого электрона появляется выбор – или быть по полю (тогда энергия будет $\varepsilon_0 + \beta H$) или против поля (тогда энергия будет $\varepsilon_0 - \beta H$). Каждый будет создавать намагниченность β в свою сторону. Если представителей обоих лагерей будет поровну, то суммарная намагниченность будет 0, но за счёт тот того, что населённость энергетических уровней зависит от энергии, ноль не будет.

$$M = n(\varepsilon_0 + \beta H) * \beta - n(\varepsilon_0 - \beta H) * \beta$$

Где β - магнитный момент одного электрона, $n(\varepsilon_0 + \beta H)$ - концетрация электронов, пошедшая «по системе» (т.е. вдоль поля), ну а $n(\varepsilon_0 - \beta H)$ – концентрация «дерзких» электронов, пошедших против ~~системы~~ поля.

При малых H формулу можно линеаризовать:

$$M = \beta\big(n(\varepsilon_0 + \beta H) - n(\varepsilon_0 - \beta H)\big) \sim \beta * \beta H * 2\frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 2\beta^2 H * \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

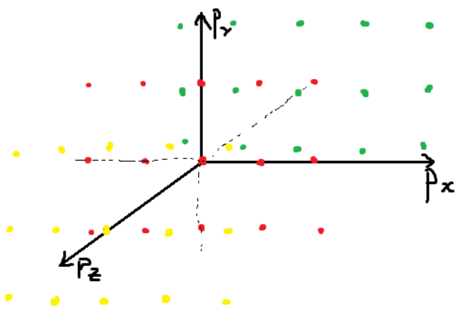
А магнитная восприимчивость тогда $\chi = \frac{M}{H} = 2\beta^2 * \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}$. Всё.

Задача 75:

Задача 15. Для крайних случаев $\theta = 0$ и $\theta \gg \varepsilon_F$ сравнить поведение намагниченности $M = M(H)$ ферми-системы, рассмотренной в предыдущей задаче, при любых значениях βH, включая область насыщения магнитного момента.

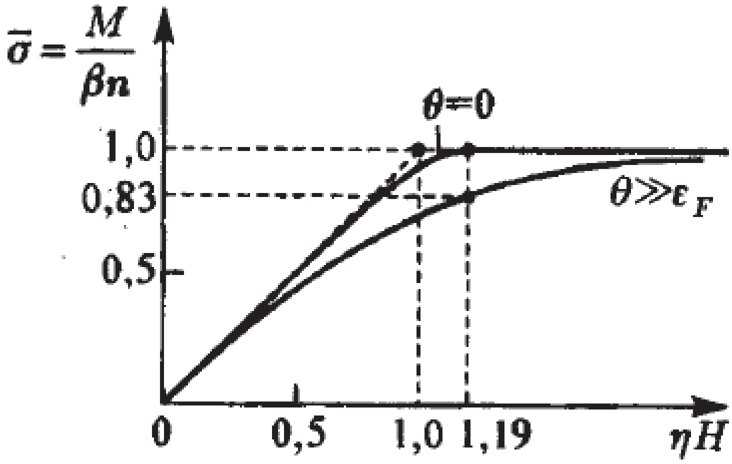
Сложная задача! Но мы прорвёмся.

Напомню, что изначально электроны сидели в узлах решётки (напоминаю, что решётка в импульсном пространстве)



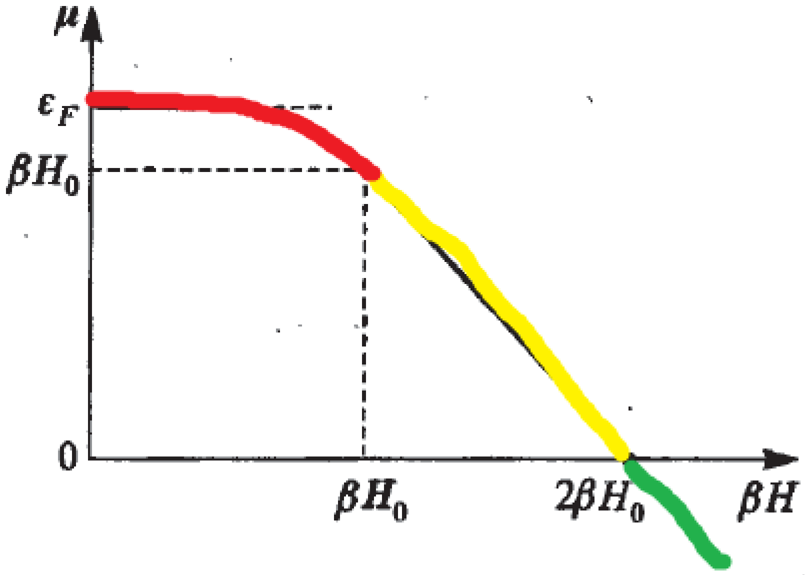
как можно

ближе к центру (напоминаю, что θ=0), а вот спины у них были направлены кто куда. Подрубили поле – спины начали выравниваться. Если обозначить за σ «единство» электронов в поляризации ($\sigma = \frac{n_{\text{по полю}} - n_{\text{против поля}}}{n}$), то график



при θ=0 очень логичен: электроны направляют свои спины так, чтобы суммарное поле B равнялось 0. При увеличении H силы у электронов заканчиваются (у них конечная концентрация!), они и так уже по максимуму выстроились вдоль H и вместо линейного возрастания у нас постоянная намагниченность M.

Та же история на другом графике:

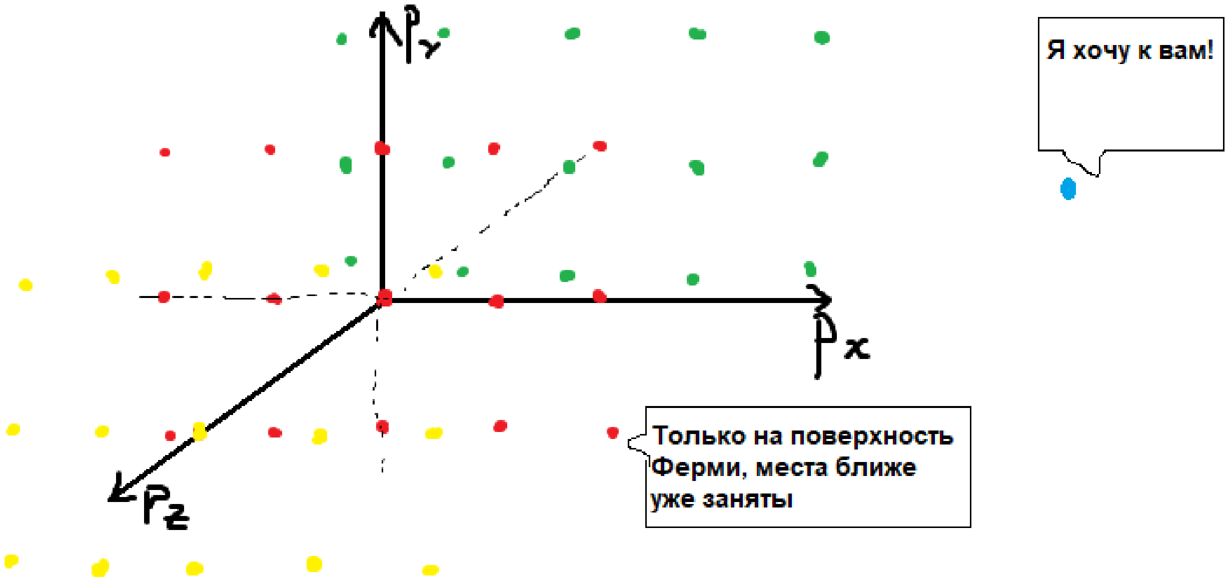


Пройдёмся по нему слева направо вдоль увеличения H.

Красный этап – электроны выстраиваются вдоль магнитного поля. При критическом магнитном поле H_0 уже все выстроились вдоль магнитного поля.
Жёлтый этап – магнитное поле равномерно понижает потенциальную (и полную) энергию электронов, которые уже выстроились вдоль него (ну U=-βH же, отсюда и линейная зависимость под углов в 135 градусов).

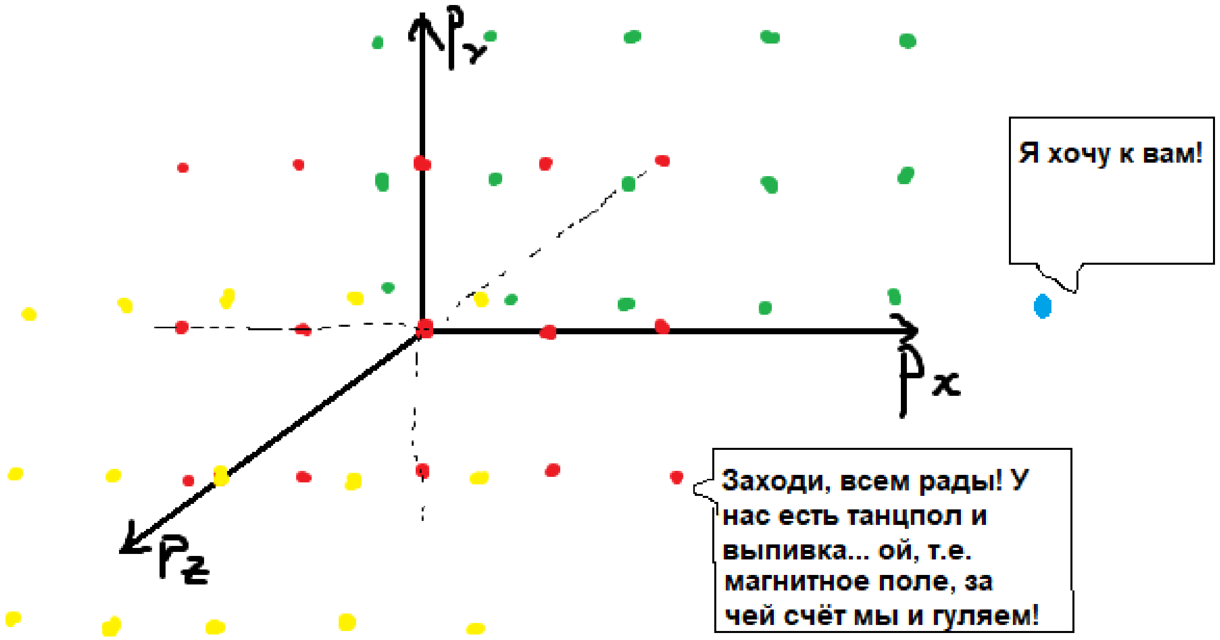
Зелёный этап – то же, что и жёлтый. Мне хочется лишь подчеркнуть тот факт, что химпотенциал становится <0.

Если раньше объём V был элитным клубом, для входа в который требовалось иметь энергию минимум энергии Ферми:



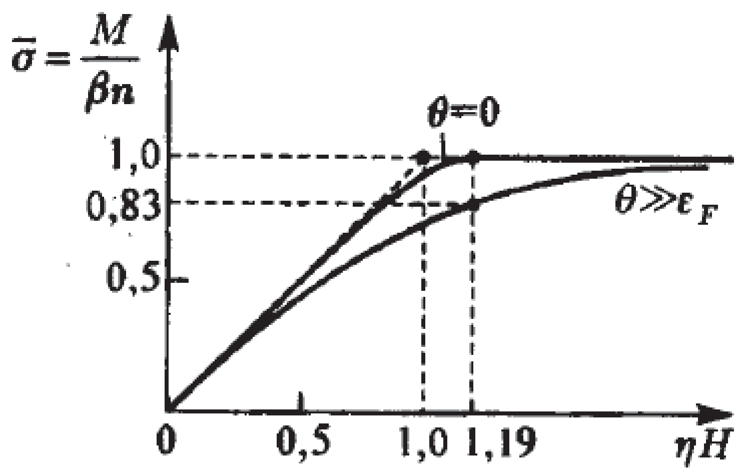
(вспомним, что $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$, т.е. это как раз энергия, которую приносит новый член клуба). А если у нового электрона энергия T+U<E_F, то элитный клуб даёт ему от ворот поворот.

Магнитное поле уменьшает эту энергию, и при $2H_0$ химпотенциал становится <0, что приводит к

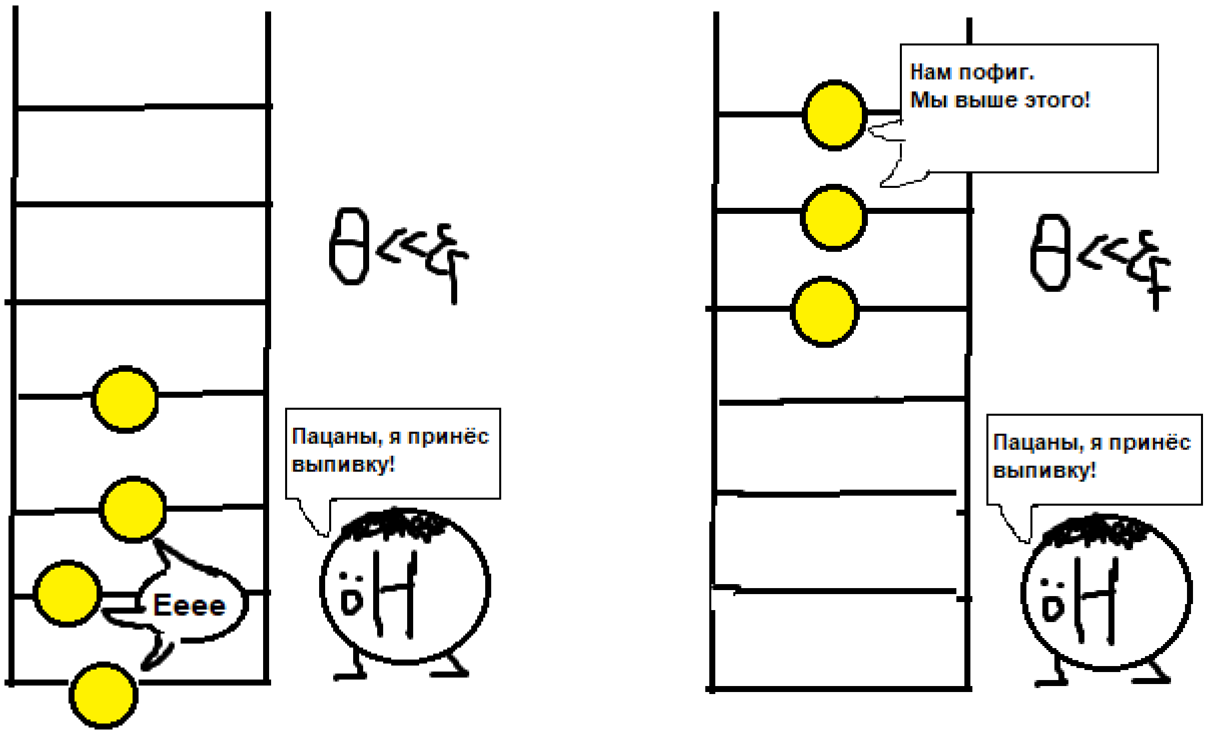


☺

Температура немного сглаживает эти грани:



Потому что она повышает кин. энергию, и электронам становится уже пофиг на «выпивку» от магнитного поля:



От нас просят аналитическое выражение. Выведем его только для $\theta \ll E_F$, потому что только этот вывод есть в Квасе.

Решение состоит и двух шагов.

Шаг 1) Выражается относительная величина поляризованности (от максимальной) через химпотенциал:

$$\bar{\sigma} = 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu + \beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}$$

Откуда эта формула берётся?

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\beta n}\frac{\beta(N_+ - N_-)}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}$$

$$1 = \frac{N_+ + N_-}{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2},$$

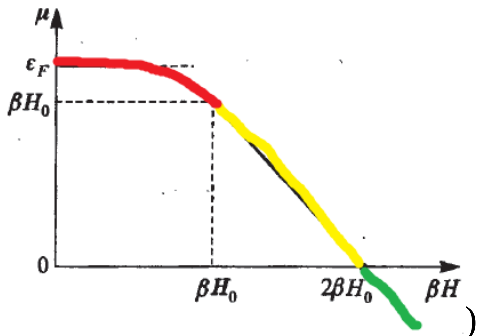
а в случае более сильных полей, $H \geqslant H_0$, когда элек тронов со спином против поля уже нет, $N_- = 0$, оба эт уравнения превращаются в одно:

$$\bar{\sigma} = 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}.$$

Честно, не разобрался в этом моменте. $\left(\frac{\mu+\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}$ - доля частиц с моментом по полю, $\left(\frac{\mu-\beta H}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}$ - против. Почему именно столько, Квас не объясняет.

2) В эту формулу подставляется химпотенциал:

$\mu \cong \beta H_0 + (\beta H_0 - \beta H)$ (это тот самый линейный участок:



)

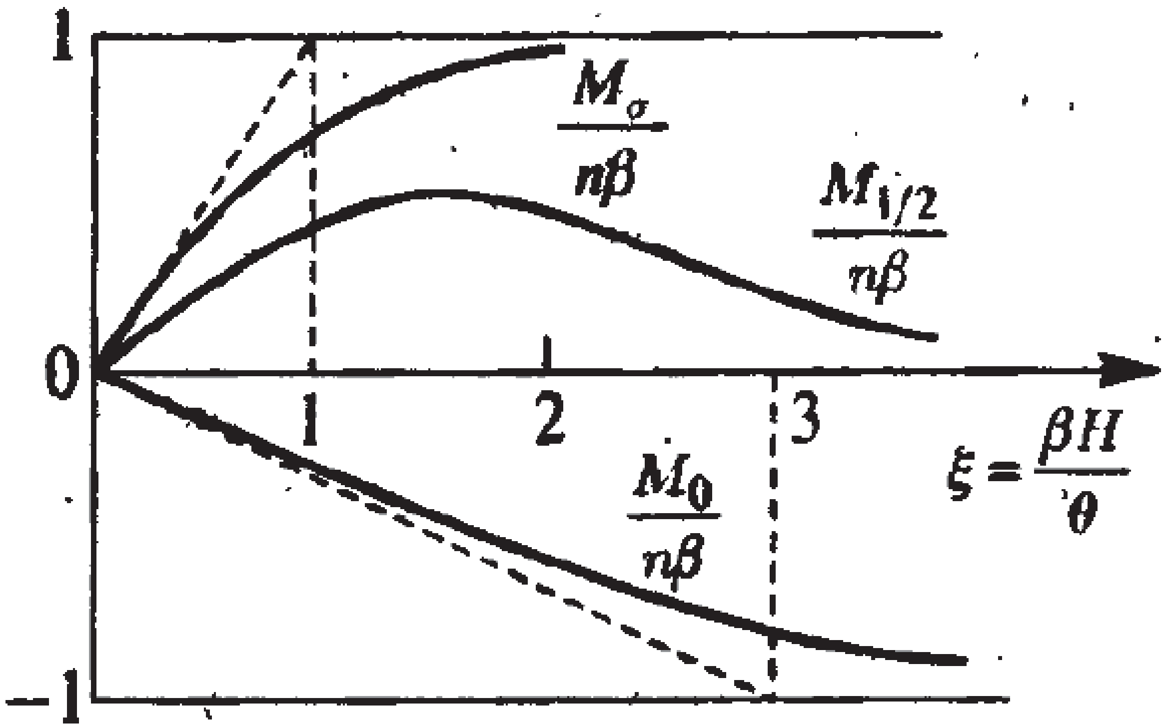
После подстановки получаем ответ:

$$\bar{\sigma} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2(\beta H_0 - \beta H)}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}$$, где $2^{2/3}\varepsilon_F = 2\beta H_0$.

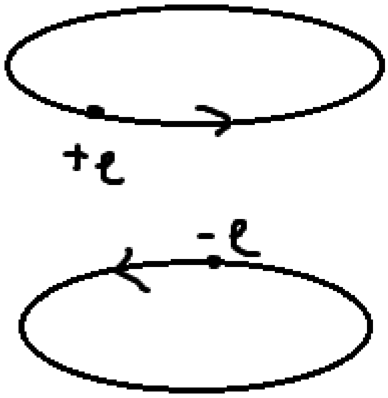
Задача 76:

Задача 16. Определить в переменных (θ, V, N, H) намагничение невырожденного газа свободных электронов. Выделить парамагнитный и диамагнитный вклады.

А начнём мы с качественного анализа – что это за вклады?

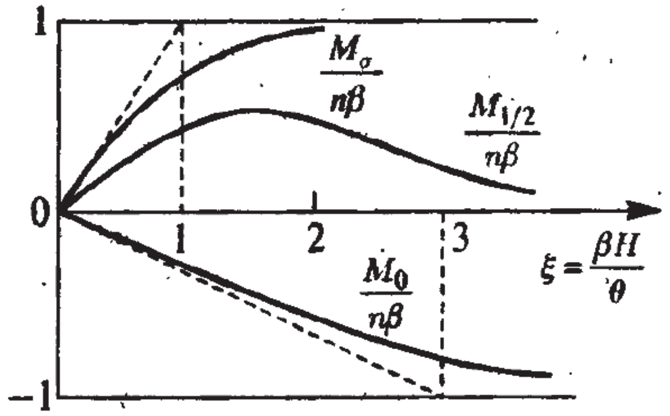


Если бы у атомов не было бы спина, они бы просто противодействовали магнитному полю. Скажем, если у нас два магнитных момента, то они стремятся друг друга скомпенсировать:



Навряд ли это вас удивит, это старое-доброе правило Ленца.
Такой бесспиновой намагниченности соответствует нижняя кривая – M0.

Иная ситуация с намагничиваем спина. Да, у электронов два магнитных вклада: один из-за того, что они имеют заряд (который, двигаясь, пытаясь скомпенсировать внешнее магнитное поле) и второй из-за спина, который как раз направлен по полю.

Как мы видим по рисунку 

, они борятся друг с другом и при H->inf M->0, хотя намагниченность всё же всегда >0 (спин побеждает).

Это конечный график! А как его получить?

Помните, в классических системах у нас была система диполей:

$$\varepsilon = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{d}\vec{D}$$

И мы для них получили формулу

$$< \vec{d} > = \theta \frac{\partial lnZ}{\partial \vec{D}}$$

где $Z = \int d^3\boldsymbol{p} \int d^3\boldsymbol{d} * exp\left(-\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d},\boldsymbol{D})}{\theta}\right)$?

А здесь точно так же, только помимо классического намагничивания, у нас появляется спиновое. σ есть -1 или 1:

$$Z = Z_{yz} Z_x Z_\sigma$$

Напоминаю, почему мы так можем делить статсумму: нам нужно подсчитать

$$< m > = \frac{\int d^3\boldsymbol{p} \int d^3\boldsymbol{m} * \boldsymbol{m} * exp\left(-\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\boldsymbol{H})}{\theta}\right)}{\int d^3\boldsymbol{p} \int d^3\boldsymbol{m} * exp\left(-\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\boldsymbol{H})}{\theta}\right)} = \theta \frac{\partial lnZ}{\partial \boldsymbol{H}}$$

где Z – статсумма – есть знаменатель. А т.к. энергия частицы ε факторизуется $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_{yz} + \varepsilon_\sigma$, то факторизуется и статсумма.

$$z_{yz} = \frac{e}{N} \sum_{p_y p_z} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{2m\theta}\right\} = \frac{e v e_{эл} H}{(2\pi\hbar)^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{2m\theta}\right\} dp_z = e\frac{v}{4}\left(\frac{2m\theta}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\beta H}{\theta},$$

$$z_x = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2\beta H}{\theta}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{\beta H}{\theta}\right\}\left(1 - \exp\left\{-\frac{2\beta H}{\theta}\right\}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{\beta H}{\theta}\right)$$

$$z_\sigma = \sum_{\sigma=-1}^{+1} \exp\left\{\frac{\beta H}{\theta}\sigma\right\} = 2\operatorname{ch}\frac{\beta H}{\theta},$$

Заметьте, что по y и z у нас непрерывный спектр (интеграл), а по x дискретный (сумма). Как так? А это уровни Ландау (были в 4-м семестре). Забыли, что это? Напомню.

Гамильтониан частицы в магнитном поле:

$$\hat{H} = \frac{\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}$$

Пусть A направлено вдоль оси y:

B={0; 0; H}

A={0; xH; 0}

Тогда

$$\hat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} + \frac{\widehat{p_z}^2}{2m} + \frac{(\widehat{p_y} - \frac{q}{c}H)^2}{2m}$$

Ищем СЗ энергии:

$$\frac{\widehat{p_x}^2}{2m}\Psi + \frac{\widehat{p_z}^2}{2m}\Psi + \frac{(\widehat{p_y} - \frac{q}{c}H)^2}{2m}\Psi = E\Psi$$

$$-\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{qH}{c}x\right)^2\Psi = E\Psi$$

Если $\psi(x, y, z) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_y y\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_z z\right\}\varphi(x)$, то, подставляя, получим $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eH}{c}x\right)^2\varphi = \left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi$. Это почти уравнение гармонического осциллятора $\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x-x_0)^2}{2}\right)\varphi(x) = E'\varphi(x)$ – только надо сделать замены $\omega = \frac{eH}{mc}, \quad x_0 = \frac{cp_y}{eH}, \quad E' = E - \frac{p_z^2}{2m}$.

Вот такая вот странная система – вдоль осей y и z части движется свободно, как синусоидальная волна $\psi(x, y, z) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_y y\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_z z\right\}\varphi(x)$, а вдоль оси x гармонически осциллирует. Энергия тогда будет складываться из поступательного движения и энергии гармонического осциллятора:

$$E = \boxed{\frac{p_z^2}{2m}} + \boxed{2\beta H\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

Именно поэтому по yz интеграл, соответствующий непрерывному движению, а по x – сумма по уровням гармонического осциллятора:

$$z_{yz} = \frac{e}{N}\sum_{p_y p_z} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{2m\theta}\right\} = \frac{eve_{\text{эл}}H}{(2\pi\hbar)^2 c}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{2m\theta}\right\} dp_z = e\frac{v}{4}\left(\frac{2m\theta}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\beta H}{\theta},$$

$$z_x = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2\beta H}{\theta}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{\beta H}{\theta}\right\}\left(1 - \exp\left\{-\frac{2\beta H}{\theta}\right\}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{\beta H}{\theta}\right)$$

$$z_\sigma = \sum_{\sigma=-1}^{+1} \exp\left\{\frac{\beta H}{\theta}\sigma\right\} = 2\operatorname{ch}\frac{\beta H}{\theta},$$

А далее считаем намагниченность:

$$< M_x > = \theta\frac{\partial lnZ_x}{\partial H}$$

$$< M_{yz} > = \theta\frac{\partial lnZ_{yz}}{\partial H}$$

$$< M_\sigma > = \theta\frac{\partial lnZ_\sigma}{\partial H}$$

Через безразмерную переменную $\xi = \frac{\beta H}{\theta}$ получим квасниковые ответикусы:

Подставляя полученные выше выражения для z, получаем для газа частиц со спином

$$\frac{M_{1/2}}{n\beta} = \frac{1}{\xi} - \frac{2}{\operatorname{sh} 2\xi} = \begin{cases} \frac{2}{3}\xi + \ldots \cong \frac{2}{3}\frac{\beta H}{\theta} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \ll 1, \\ \frac{1}{\xi} - 4e^{-2\xi} + \ldots \cong \frac{\theta}{\beta H} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \gg 1, \end{cases}$$

для спинового намагничения —

$$\frac{M_\sigma}{n\beta} = \frac{\partial \ln z_\sigma}{\partial \xi} = \operatorname{th}\xi = \operatorname{th}\frac{\beta H}{\theta} \cong \begin{cases} \frac{\beta H}{\theta} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \ll 1, \\ 1 - 2\exp\left\{-2\frac{\beta H}{\theta}\right\} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \gg 1, \end{cases}$$

для намагничения газа бесспиновых заряженных частиц —

$$\frac{M_0}{n\beta} = \frac{M_{1/2} - M_\sigma}{n\beta} = \frac{1}{\xi} - \frac{2}{\operatorname{sh} 2\xi} - \operatorname{th}\xi \cong \begin{cases} -\frac{1}{3}\frac{\beta H}{\theta} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \ll 1, \\ -1 + \frac{\theta}{\beta H} & \text{в случае } \frac{\beta H}{\theta} \gg 1. \end{cases}$$